

局部几何结构驱动的图片插值放大及超分辨率复原

邵文泽¹⁾ 韦志辉²⁾

¹⁾(南京理工大学计算机科学与技术学院,南京 210094) ²⁾(南京理工大学研究生院,南京 210094)

摘要 众所周知,图像插值是根据一幅低分辨率噪声图像重建相应高分辨率清晰图像的数字图像处理技术。虽然已有一些文献报道了多种图像插值算法,然而现有算法在插值视觉效果和计算复杂度两者间往往难以实现均衡,为此,提出了一种局部几何结构驱动的偏微分方程(PDE)图像插值算法。该算法通过耦合边缘、纹理和角形3种不同几何结构的扩散机制来进行插值,插值结果表明,该算法不仅具有抗噪声性能,而且能够同时增强边缘、纹理以及角形结构。考虑到图像的超分辨率复原与插值放大在数学本质上的一致性,特将上述PDE应用推广到图像的超分辨率复原,并且针对高强度噪声情形下,超分辨率图像中出现的伪纹理结构,提出了一种耦合全变差模型的改进的PDE。实验结果表明,不论是插值放大图像,还是超分辨率复原图像都具有较高的视觉质量和峰值信噪比。

关键词 图像插值 图像放大 边缘增强 角形生长 超分辨率

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)07-1235-09

Local Geometry Driven Image Magnification and Super-resolution

SHAO Wen-ze¹⁾, WEI Zhi-hui²⁾

¹⁾(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

²⁾(Graduate School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract Image Interpolation aims at reconstructing a high-resolution image from a low resolution noisy image. Though many magnification algorithms have been proposed in literatures, it is much difficult to balance the tradeoff between the visual quality of the interpolated image and the computational complexity of the algorithm. In the paper, a novel interpolation PDE approach is proposed driven by local geometric structures. Coupled with different diffusion mechanisms corresponding to edges, textures, and corners, the novel algorithm is not only robust to noise, but also capable of enhancing the edges and textures, as well as preserving the corner structures. The novel PDE is subsequently applied to super-resolution reconstruction, consisting in that image interpolation and super-resolution are mathematically consistent. Besides, coupled with total variation modeling, a slightly improved version of the novel PDE is proposed to remove the false textures in the super-resolved image in the case of high-level noise. Numerous experiment results demonstrate the effectiveness of our approach, both in the visual effect and the PSNR value.

Keywords image interpolation, image magnification, edge-enhancing, corner-growing, super-resolution

1 引言

所谓图像插值就是从一幅低分辨率噪声图像重

建相应高分辨率清晰图像的数字图像处理技术,其在实际应用领域中具有重要作用,如航天遥感、视频监控、医学成像等。虽然文献已经有了多种图像插值算法^[1-10]的报道,然而现有算法在插值视觉效果

基金项目:国家自然科学基金项目(60672074);长三角联合攻关重大科技项目(BE2004400);江苏省自然科学基金项目(BK2006569);教育部博士点基金项目(M200606018);国家高技术研究发展计划(863)项目(2007AA12E100)

收稿日期:2006-09-18; **改回日期:**2006-11-28

第一作者简介:邵文泽(1981~),男。现为南京理工大学博士研究生。研究方向包括图像建模、图像恢复、图像插值、超分辨率复原、数学反问题。E-mail:shaowenze1010@yahoo.com.cn

和计算复杂度两者间往往难以实现均衡。同时,考虑到图像插值放大与当前热门研究领域—超分辨率复原在数学本质上的一致性,笔者认为,研究高性能的图像插值放大算法具有重要的理论和现实意义。

图像插值中最直观的方法是直接插值法,如线性插值、非线性(边缘自适应)插值等。其中,线性插值法^[1,2],如双线性插值、双三次插值、样条插值都是将灰度图像看作是一个采样的 2 维多项式函数,并通过拟合该函数采样点的灰度值来实现图像放大^[3]。由于线性插值法是基于简单的多项式函数,因此计算复杂度低,但由于其没有考虑图像边缘等细节信息的位置,因此容易造成图像模糊,同时边缘位置会出现马赛克现象(锯齿、方块效应)。非线性插值法^[4-7]的基本思想是,通过考虑图像边缘的位置及其相关性,使边缘自适应地实现图像亚像素灰度值的拟合,从而得到具有光滑边缘的放大清晰图像;其存在的问题是计算复杂度高。另外,不论是线性插值,还是非线性插值,直接插值法对噪声的敏感性都较强。

图像插值的另外一类方法是基于图像建模与正则化理论的插值^[8-10],如 Tikohonov 确定性正则化方法、Huber-MRF 随机性正则化方法、全变差(TV)模型^[4]等。这类方法中的多数算法,由于直接来源于图像复原领域的研究成果,因此具有一定的抗噪声性能。然而,对于边缘位置出现的马赛克现象,该类算法的抑制能力相对较弱,下面以全变差方法为例进行说明。由于该算法具有各向异性扩散的性质,即在平滑区域各向同性扩散,而在边缘区域则抑制扩散,甚至停止扩散,因此不能充分平滑边缘位置上的锯齿现象,也就是说,放大图像的视觉效果有待继续改善。

本文提出一种局部几何结构驱动的偏微分方程(PDE)图像插值算法。该算法通过耦合边缘、纹理和角形 3 种几何结构的扩散机制,不仅具有抗噪声性能,而且能够同时增强边缘和纹理以及保持角形结构。利用其进行插值的图像视觉效果验证了本文算法的有效性。本文提出的 PDE 同样适用于图像的超分辨率复原。通过耦合全变差去噪模型,还可以进一步增强本文 PDE 的噪声鲁棒性。

2 局部几何结构驱动的图像插值

对于自然图像,往往包含如下 3 种基本类型的几何结构信息,即边缘、纹理以及角形结构,它们构成了图像内容的主要组成部分。因此,研究局部几

何结构驱动的图像插值机制,对于重建高分辨率清晰图像具有非常重要的理论和现实意义。

在本文的图像插值放大中,局部几何结构驱动的图像插值机制需要克服以下难题:

- (1) 在插值放大的同时,还需通过各向同性平滑扩散来去除图像的平坦区域中可能存在的随机高斯噪声;
- (2) 沿着图像边缘和纹理结构的方向平滑扩散可能出现的马赛克效应;
- (3) 重建恢复由于平滑扩散而可能丢失的角形结构信息;
- (4) 抑制平滑扩散和插值过程中可能引入的图像模糊。

由于偏微分方程在刻画基于几何结构的扩散机制方面具有更强的物理意义和可定量操作性,因此本文图像插值放大将建立在 PDE 的理论框架上实现。具体而言,本文的插值放大机制基于如下偏微分方程:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t &= c_1 \text{Term}_1(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + c_2 \text{Term}_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp) + \\ &c_3 \text{Term}_3(\mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp) + c_4 \text{Term}_4(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (1) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 为插值图像, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ 为初始插值图像, \mathbf{w} 为局部几何结构垂直方向上的单位向量, \mathbf{w}^\perp 为 \mathbf{w} 的正交单位向量, c_i 为各项 Term_i 的可控扩散函数(或参数), c_i 值越大,扩散强度越大。在 PDE(式(1))中,右端 4 项分别用于解决上述(1)~(4)4 个问题。在图像的平滑区域, $c_1 \text{Term}_1$ 与 $c_2 \text{Term}_2$ 用于耦合实现各向同性扩散和抑制平坦区域中可能存在的随机高斯噪声;在图像中的边缘、纹理区域, $c_2 \text{Term}_2$ 用于沿着边缘和纹理结构的方向平滑扩散可能产生的马赛克效应;在图像中的角形区域, $c_3 \text{Term}_3$ 用于恢复角形结构生长和补偿平滑扩散过程中可能丢失的角形结构信息; $c_4 \text{Term}_4$ 用于实现图像增强功能和抑制可能引入的图像模糊。

由于单位向量 \mathbf{w}^\perp 代表局部几何结构的方向,因此根据 Term_1 与 Term_2 的物理含义,容易分别设计得到

$$\begin{aligned} \text{Term}_1(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ \text{Term}_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}^\perp) &= D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) \quad (2) \end{aligned}$$

其中, $D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1)^2 \mathbf{u}_{xx} + 2v_1 v_2 \mathbf{u}_{xy} + (v_2)^2 \mathbf{u}_{yy}$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 。由于冲击滤波器(shock filer)^[11,12]具有图像锐化的功能,即

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = -\text{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})) |\nabla \mathbf{u}|$$

其中, $\boldsymbol{\eta} = \nabla \mathbf{u} / |\nabla \mathbf{u}|$ 为图像的梯度方向,为此就可

以设计一个基于局部几何结构方向的冲击滤波器,即

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = -\operatorname{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w})) |\nabla \mathbf{u}| \quad (3)$$

并且定义第4项为

$$\text{Term}_4(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\operatorname{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w})) |\nabla \mathbf{u}| \quad (4)$$

需要说明的是,Weickert于2003年提出了一种相同形式的PDE(式(3))用于相关性增强^[13]。为了实现角形结构生长,本文提出如下PDE:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = c_3 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\operatorname{div}(\mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{w}^+)) \quad (5)$$

其中, 2×2 矩阵 \mathbf{M} 的散度算子 div 定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(m_{11} & m_{12})^T \\ \operatorname{div}(m_{21} & m_{22})^T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

从而可令

$$\text{Term}_3(\mathbf{u}, \mathbf{w}^+) = (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\operatorname{div}(\mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{w}^+)) \quad (6)$$

关于PDE(式(5))的性能分析将在下节中具体阐释。

综上所述,即可得到如下局部几何结构驱动的图片插值统一PDE框架:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t = & c_1 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + c_2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^+) + \\ & c_3 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\operatorname{div}(\mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{w}^+)) + \\ & c_4 (-\operatorname{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}))) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \quad (7)$$

其中,关键问题是需要确定局部几何结构垂直方向上的单位向量 \mathbf{w} 或者其正交向量 \mathbf{w}^+ 。

3 基于结构张量的快速插值放大

在局部几何结构驱动的图片插值机制中,局部结构的方向估计是决定图像插值放大效果最为关键的因素。目前,已有许多文献报道了多种估计局部几何结构方向的方法:如Perona基于各向异性扩散思想定义方向映射实现方向估计^[14];Bigun等人将局部结构方向估计归结为Fourier变换域中的平面最小二乘拟合问题^[15];而基于可控滤波器的估计方法则精度有效,且难以推广^[16];Wilson等人则基于多尺度分析(MRA)思想提出了一种多尺度的结构方向估计方法^[17];Weickert等人则基于主成分分析(PCA)思想提出了一种称为结构张量的结构方向估计方法^[18];Feng等人进一步耦合PCA和MRA的思想,提出了一种鲁棒性更强的方向估计方法^[19]。通过对各种结构

方向估计方法的综合分析,笔者认为,Weickert等人的结构张量方法具有最佳的时效性能。具体地说,结构张量方法不仅估计精度较高,而且时间复杂度较低,同时还能定量给出几何结构的局部相关性。

结构张量定义如下^[18]:

$$\mathbf{J}_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma) = G_\rho * (\nabla \mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \mathbf{u}_\sigma) \triangleq \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中, \mathbf{u}_σ 为图像 \mathbf{u} 经过高斯滤波后的图像(方差为 σ),其不仅保证了边缘检测对尺度小于 σ 的信息不敏感,而且减少了噪声对求导运算的影响;对张量 $\nabla \mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \mathbf{u}_\sigma$ 进行高斯滤波(方差为 $\rho \geq 0$),可保证结构分析对纹理等流线型结构具有较强的鲁棒性。由于矩阵 \mathbf{J}_ρ 对称,且半正定,从而存在正交单位特征向量,分别记为 \mathbf{w} 和 \mathbf{w}^+ 。其中

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2J_{12} \\ J_{22} - J_{11} + \sqrt{(J_{22} - J_{11})^2 + 4J_{12}^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} / |\mathbf{w}|$$

指向局部结构的最大对比度方向,称为主向量;相应地, \mathbf{w}^+ 指向局部结构的最小对比度方向,可近似认为是局部几何结构的方向。它们相应的特征值分别记为 μ 和 μ^+ :

$$\mu = \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} + \sqrt{(J_{22} - J_{11})^2 + 4J_{12}^2})$$

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} - \sqrt{(J_{22} - J_{11})^2 + 4J_{12}^2})$$

这两个值可以作为局部几何结构的特征描述子,即在平滑区域, $\mu \approx \mu^+ \approx 0$;在边缘区域, $\mu \gg \mu^+ \approx 0$;而在角形区域,则 $\mu \geq \mu^+ > 0$ 。因此, $lcm = (\mu - \mu^+)^2$ 可以作为一种局部相关性度量(local coherence measure; LCM)。

基于结构张量,可首先通过仿真方法来阐释PDE(式(5))的滤波性能。为此,构造如下耦合PDE:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t = & c_3 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\operatorname{div}(\mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{w}^+)) + \\ & c_4 (-\operatorname{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}))) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \quad (10)$$

其中,右端第1项用于控制角形结构生长,第2项用于控制图像的锐化程度。由图1(b)中生长的角形结构知,由于PDE(式(5))对图像角形结构处的梯度场起增强作用,因此 $(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\operatorname{div}(\mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{w}^+))$ 实质上是一种特殊的“角形结构检测算子”。通过比较图1(d)和图1(e)中的去模糊图像知, Term_3 对于图像处理中的角形结构保持起到了至关重要的作用。



图 1 PDE(式(5))的性能分析仿真实验
(结构张量中 $\sigma = 1.5, \rho = 2$)

Fig. 1 Experimental performance analysis of PDE(Eq. (5)) ($\sigma = 1.5, \rho = 2$)

根据上述讨论,本文提出如下基于结构张量的图像插值放大 PDE 方法:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t = & c_1(lcm) D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + c_2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) + \\ & c_3(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\text{div}(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp)) + \\ & c_4(-\text{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}))) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \quad (11)$$

其中, \mathbf{w} 的定义见式(9), c_1 为单调递减偶函数, 本文选取 $c_1(t) = c_0 / (1 + t^2/k^2)$, k 为可调参数; $c_i (i = 2, 3, 4)$ 为各扩散项的控制参数。因此, PDE(式(11))的自由参数有: $\sigma, \rho, c_0, k, c_2, c_3, c_4$, 参数自由度为 7。它的数值迭代格式为

$$\mathbf{u}_x^{(t+1)} = \mathbf{u}_x^{(t)} + \tau \left\{ \begin{aligned} & c_1 D^2 \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \\ & c_2 D^2 \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) + \\ & c_3 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\text{div}(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp)) + \\ & c_4 (-\text{sgn}(D^2 \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{w}, \mathbf{w}))) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \right\}_x \quad (12)$$

其中, τ 为迭代步长, t 为迭代序号, \mathbf{x} 为图像像素的坐标。本文选取 Weickert 提出的最优导数滤波器^[20]来计算式(12)中的一阶偏导数和二阶偏导数。PDE 式(11)的数值求解步骤归纳如下:

(1) 选取双线性插值图像作为初始迭代图像 $u_0(\mathbf{x})$, 令 $t = 0$;

- (2) 计算 $(\mathbf{u}_\sigma)_x, (\mathbf{u}_\sigma)_y, (\mathbf{u}_\sigma)_{xx}, (\mathbf{u}_\sigma)_{xy}, (\mathbf{u}_\sigma)_{yy}$;
- (3) 计算 $\mathbf{J}_\rho, \mathbf{w}, c_1, D^2 \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{w}, \mathbf{w}), D^2 \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp)$;
- (4) 计算 $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\text{div}(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp))$;
- (5) 利用式(12)更新图像;
- (6) 如果 $t < T$ (总的迭代次数), 则 $t = t + 1$, 并转到第(2)步; 否则停止。

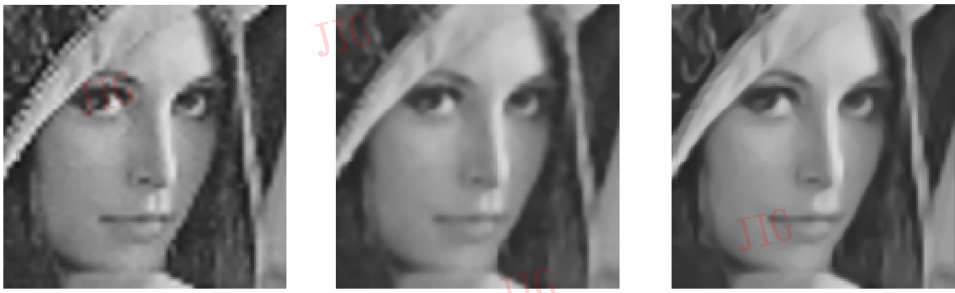
相关的实验参数有: $\sigma, \rho, \tau, c_0, k, c_2, c_3, c_4, T$ 。在本文插值放大实验中, 下列参数值固定不变: $\sigma = 1.5, \rho = 2, \tau = 0.24, k = 2, T = 20$ 。因此, 只需根据具体图像调节控制参数 $c_i (i = 0, 2, 3, 4)$ 的值即可, 这里给出的参数的经验参考区间为 $c_0 \in [1, 5], c_2 \in [1, 3], c_3 \in [1, 2], c_4 \in [0.10, 0.30]$ 。

本文所有实验都在 MATLAB7.0 平台 (Pentium (R) 4 CPU (2.4 GHz)) 下实现。根据数值求解步骤知, 本文方法的计算量主要集中于(2)、(4)两步中的求导运算。由于求导运算采用的是最优导数滤波器 (3×3), 从而求导运算实质上是一种线性滤波。由于注意到第 3 步计算结构张量时, 采用的也是线性高斯滤波 (邻域尺寸取决于 ρ), 因此, 本文算法的计算复杂度相对较低。与全变差方法^[4]相比, 本文算法的额外计算量主要是利用线性高斯滤波器 (邻域尺寸取决于 ρ) 计算结构张量 \mathbf{J}_ρ 。例如, 对于一幅大小为 64×64 的图像, 在放大倍率为 4、 $T = 20, \rho = 2$ 的情形下, 本文算法所耗 CPU 时间为 6s, 而全变差方法所耗 CPU 时间仅为 2s。因此, 为了进一步降低本文算法的计算复杂度, 今后可以考虑利用快速傅里叶变换 (FFT) 实现线性高斯滤波。

为验证本文算法的插值效果, 分别利用双三次插值法、全变差方法以及本文算法对图 2 中的两幅图像进行插值放大。插值采用的原始图像如图 2 所示, 其中图 2(b) 为光学相机实际拍摄的照片经过数字扫描得到的扫描图像。由图 3 的插值放大效果看, 本文方法在抑制马赛克效应和保持图像清晰度方面比前两者方法具有明显优势。图 4 是真实图像 (图 2(b)) 的放大插值结果和相应的



图 2 原始图像
Fig. 2 Original images



(a) 双三次插值方法的插值结果 (b) 全变差方法的插值结果 (c) 本文方法的插值结果 ($c_2=1.5, c_3=0.5, c_4=0.05$)

图 3 Lena 插值结果(放大 3 倍)

Fig. 3 Magnification results ($q = 3$)



(a) 双三次插值方法的插值结果 (b) 全变差方法的插值结果 (c) 本文方法的插值结果 ($c_2=2, c_3=1, c_4=0.15$)



(d) Canny算子检测到的图4 (a) 的边缘 (e) Canny算子检测到的图4 (b) 的边缘 (f) Canny算子检测到的图4 (c) 的边缘



(g) Prewitt算子检测到的图4 (a) 的边缘 (h) Prewitt算子检测到的图4 (b) 的边缘 (i) Prewitt算子分别检测到的图4 (c) 的边缘

图 4 Girl 插值结果(放大 3 倍)

Fig. 4 Girl magnification results ($q = 3$)

边缘检测结果。由于原始图像本身存在噪声,致使双三次插值法在放大图像的同时,也扩大了图像中的噪声(图 4(d)),同时,边缘特征没有得到较好重建,断裂结构特别明显(图 4(g));相对于双三次插值法,全变差方法具有一定的噪声抑制能力(图 4(e))和边缘重建能力(图 4(h));而本文方法则不论是在抑制噪声还是重建边缘方面,都比前两种方法取得了更好的视觉效果。

4 在超分辨率复原中的应用

超分辨率复原是一种由一个低分辨率的退化图像序列来重建一幅(或序列)高分辨率清晰图像的复原技术^[21-25]。与传统的图像复原技术不同之处在于,由于超分辨率复原技术充分利用了获取的低分辨率图像序列,并且综合考虑了成像过程中的各种退化因素(如运动变形、光学模糊、低采样率、随机噪声等),因而更具广泛性和实用性,如红外图像、遥感图像复原等领域。然而,从退化模型的角度看,超分辨率复原与传统的图像复原在 Hardmard 意义下均是非适定数学反问题^[21],从而具有共同的理论支撑,如正则化理论、Bayesian 统计等。事实上,几乎所有超分辨率复原算法本质上都源于正则化理论或 Bayesian 统计^[21-25]。

假设低分辨率图像序列中包含 P 帧 $N_1 \times N_2$ 大小的退化图像。超分辨率复原的任务是复原一幅 $R_1 N_1 \times R_2 N_2$ 大小的高分辨率清晰图像 \mathbf{u} , 其中 R_1, R_2 分别为水平方向和垂直方向的分辨率提高因子。对图像 \mathbf{u} 按列重新排列后,假设高分辨率图像为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)^T, M = R_1 N_1 R_2 N_2$, 第 k 幅低分辨率图像为 $\mathbf{G}_k = (\mathbf{g}_{k_1}, \mathbf{g}_{k_2}, \dots, \mathbf{g}_{k_L})^T, L = N_1 N_2, k = 1, 2, \dots, P$ 。图像获取是一个相对复杂的过程,因此精确的退化建模对有效的超分辨率复原至关重要。已有的文献中,通常采用如下形式的退化模型:

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{D} \mathbf{B}_k \mathbf{M}_k \mathbf{u} + \mathbf{n}_k \quad (13)$$

令 $\mathbf{H}_k = \mathbf{D} \mathbf{B}_k \mathbf{M}_k$, 则退化模型(13)可表示为

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{n}_k, k = 1, 2, \dots, P$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{B}_1 \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D} \mathbf{B}_p \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_p \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (14)$$

基于正则化理论的超分辨率复原通常可转化为如下最小能量泛函求解问题

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\lambda}{2} \cdot \|\mathbf{G} - \mathbf{H} \mathbf{u}\|^2 + E_{\text{reg}}[\mathbf{u}] \right\} \quad (15)$$

其中, $E_{\text{reg}}[\mathbf{u}]$ 称为正则化项,起到边缘保持作用, λ 称为正则化参数,起到均衡图像保真项和正则项的作用。利用最速下降法求解式(15),即

$$\mathbf{u}_x^{(t+1)} = \mathbf{u}_x^{(t)} + \tau \left\{ \lambda \cdot \mathbf{H}^T (\mathbf{G} - \mathbf{H} \mathbf{u}^{(t)}) \Big|_{\mathbf{x}} + (-\nabla E_{\text{reg}}[\mathbf{u}^{(t)}]) \Big|_{\mathbf{x}} \right\} \quad (16)$$

其中, τ 为时间步长, t 为迭代序号, \mathbf{x} 为超分辨率图像像素的坐标。

与传统超分辨率复原算法不同的是,本文提出如下基于半离散 PDE 的超分辨率复原框架

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{H}^T (\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \quad (17)$$

其中, \mathbf{F} 为一个连续微分算子,刻画图像 \mathbf{u} 的局部几何特征。当 $\mathbf{F} = \text{div}(\nabla \mathbf{u} / |\nabla \mathbf{u}|)$, 则式(17)退化为基于 TV 的超分辨率复原算法^[25]; 当 $\mathbf{F} = |\nabla \mathbf{u}| \text{div}(\nabla \mathbf{u} / |\nabla \mathbf{u}|)$, 与式(17)对应的是基于水平线重建的超分辨率复原算法(目前,该方法尚未公开发表过)。由第 3 节知,本文提出的 PDE(式(11))在重建边缘和保持角形结构方面具有明显优势,因而更加适合超分辨率图像复原。为此,在半离散 PDE 超分辨率图像复原框架(式(17))中,本文的微分算子 \mathbf{F} 定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & c_1 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + c_2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) + \\ & c_3 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\text{div}(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp)) - \\ & c_4 \text{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w})) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \quad (18)$$

图 5 分别给出了基于 TV 模型^[25]和本文算法的超分辨率复原图像。低分辨率图像序列是由一幅高分辨率图像(woman)经过水平方向和垂直方向分别平移 0, 1, 2, 3 个像素、4×4 像素块整合平均以及 4 倍率的下采样和方差为 5 的高斯噪声退化后得到的,图 5(a)给出了其中一帧的像素复制图像。基于 TV 模型的超分辨率图像复原算法的参数为 $T = 15, \tau = 0.24, \lambda = 0.15, \text{PSNR} = 28.0098 \text{ dB}$; 本文算法的参数为 $T = 15, \tau = 0.24, \sigma = 1.5, \rho = 2, k = 2, c_0 = 5, c_2 = 1.5, c_3 = 1, c_4 = 0.05, \lambda = 0.25, \text{PSNR} = 28.6500 \text{ dB}$ 。由图 5(b)和图 5(c)的比较可见,不论是复原图像的视觉效果,还是峰值信噪比(PSNR),都显示了本文算法在超分辨率图像复原中的有效性。

在高强度的高斯噪声情形下,本文算法依然优于 TV 算法。图 6 给出了高斯噪声方差为 10 时采用两种方法的超分辨率复原结果,实验中仅改变正

则参数 λ 的值。其中,TV 算法的复原结果为 $\lambda = 0.10$,PSNR 值为 26.924 4dB;本文算法的复原结果为 $\lambda = 0.15$,PSNR 值为 27.779 2dB。



(a) 单幅低分辨率图像 (64×64) (b) TV方法复原图像 (PSNR=28.009 8dB) (c) 本文方法复原图像 (PSNR=28.650 0dB)

图 5 超分辨率复原结果

Fig. 5 Super-resolution reconstruction results



(a) 单幅低分辨率图像 (64×64) (b) TV方法复原的图像 (PSNR=26.924 4dB) (c) 本文方法复原的图像 (PSNR=27.779 2dB)

图 6 超分辨率复原结果

Fig. 6 Super-resolution reconstruction results

然而,从图 6(c) 的视觉效果看,超分辨率复原图像的平滑区域中出现大量的细小伪纹理结构。其原因主要在于,结构张量(式(8))对高强度的高斯噪声是弱鲁棒的,即平滑区域中的高强度噪声在结构张量(式(8))中体现的是一种具有几何结构的相关性信息。为了有效消除这种伪纹理结构,首先考虑以下两种简单直观的方法:①图 6(a) 虽然大幅度增大了结构张量(8)中高斯滤波器的 σ 值,但这将导致图像中的边缘、纹理等几何结构模糊,从而不利于局部几何结构的方向估计;②图 6(b) 中虽然大幅度增大了复原框架(式(17))中正则化参数 λ 的值,然而由于这将导致超分辨率复原图像过于模糊,从而违背了超分辨率复原的初始宗旨。

为了进一步提高超分辨率图像的视觉效果和 PSNR 值,本文基于 TV 模型在噪声抑制过程中的边缘保持性,对 PDE(式(17))中的微分算子 F 和结构张量进行如下修正:

$$F = c_2 D^2(u_{TV})(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) + c_3(u_{TV})^T \cdot (\text{div}(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp)) - c_4 \text{sgn}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w})) |\nabla(u_{TV})| \quad (19)$$

$$J_\rho^{\text{TV}}((u_{TV})_\sigma) = G_\rho * (\nabla(u_{TV})_\sigma \otimes \nabla(u_{TV})_\sigma) \quad (20)$$

其中, \mathbf{w} 为矩阵 J_ρ^{TV} 的单位特征向量,形如式(9), u_{TV} 为图像 u 经过 TV 滤波后的图像(迭代 2~3 次),经过 TV 滤波既抑制了边缘检测对噪声点的敏感性,又增强了超分辨率复原算法的噪声去除能力。注意到,由于 TV 滤波预处理能够忽略式(18)中第

1 项,从而降低了半离散 PDE 的超分辨率复原框架(式(17))的参数自由度,即只有以下 6 个自由参数: $\lambda, \sigma, \rho, c_2, c_3, c_4$ 。

基于修正的微分算子 F 和结构张量,利用 PDE(式(17))对图 6 中的低分辨率图像序列进行超分辨率复原,实验结果如图 7 所示(局部放大)。实验参数如下: $T = 15, \tau = 0.24, \sigma = 1.5, \rho = 2, c_2 = 1.5, c_3 = 1, c_4 = 0.05, \lambda = 0.15$, PSNR = 28.076 4dB。实验结果显示,修正后的复原算法同时提高了超分辨率复原图像的视觉效果和 PSNR 值。

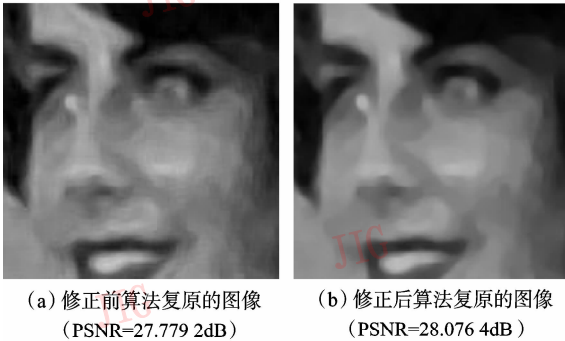


图 7 超分辨率复原结果(局部放大)

Fig. 7 Super-Resolution reconstruction results
(local magnification)

5 结 论

本文提出一种局部几何结构驱动的偏微分方程图像插值放大算法。通过耦合边缘、纹理和角形 3 种不同几何结构的扩散机制,本文算法不仅具有抗噪声性能,而且能够同时增强边缘、纹理以及角形结构。考虑到图像超分辨率复原与插值放大在数学本质上的一致性,可将本文提出的 PDE 应用到图像超分辨率复原,并且针对高强度噪声情形下超分辨率图像中出现的伪纹理结构,提出了一种耦合全变差模型的改进 PDE。

致 谢 感谢肖亮博士给予本文工作的支持和帮助!感谢邓海松硕士提供的扫描照片!

参考文献 (References)

- 1 Blu T, Thévenaz P, Unser M. Linear interpolation revitalized[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, **13**(5): 710 ~ 719.
- 2 Sun Qing-jie, Zhang Xiao-peng, Wu En-hua. A method of image zooming—based on Bézier surface in interpolation[J]. Journal of Software, 1999, **10**(6): 570 ~ 574. [孙庆杰, 张晓鹏, 吴恩华. 一

- 种基于 Bézier 插值曲面的图像放大方法[J]. 软件学报. 1999, **10**(6): 570 ~ 574.]
- 3 Morse B S, Schwartzwald D. Image magnification using level-set reconstruction[A]. In: Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Kauai, Hawaii USA, 2001, **1**: 333 ~ 340.
- 4 Malgouyres F, Guichard F. Edge direction preserving image zooming: A mathematical and numerical analysis [J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 2001, **39**(1): 1 ~ 37.
- 5 Allebach J, Wong P W. Edge-directed interpolation [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C], Lausanne, Switzerland, 1996: 707 ~ 710.
- 6 Li X, Orchard T. New edge-directed interpolation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**(10): 1521 ~ 1527.
- 7 Cao Zong-jie, Pan Xi-de, Xue Jin, et al. Image interpolation method for improving resolution of ultrasonic C-Scan image[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, **39**(9): 921-924. [曹宗杰, 潘希德, 薛锦等. 提高超声 C 扫描图像分辨率的插值方法研究[J]. 西安交通大学学报, 2005, **39**(9): 921 ~ 925.]
- 8 El-Khamy S E, Hadhoud M M, Dessoukg M I, et al. Efficient implementation of image interpolation as an inverse problem [J]. Digital Signal Processing. 2005, **15**(2) 137 ~ 152.
- 9 Schultz R R, Stevenson R L. A Bayesian approach to image expansion for improved definition[J]. IEEE Transactions on Image Processing. 1994, **3**(3): 233 ~ 242.
- 10 Chan T F, Shen J H. Mathematical models for local nontexture inpaintings[J]. SIAM Journal of Applied Mathathematics, 2002, **62**(3): 1019 ~ 1043.
- 11 Osher S J, Rudin L I. Feature-oriented image enhancement using shock filters [J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1990, **27**(4): 919 ~ 940.
- 12 Alvarez L, Mazorra L. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion [J], SIAM Journal of Numerical Analysis, 1994, **31**(2): 590 ~ 605.
- 13 Weickert J. Coherence-enhancing shock filters. Pattern Recognition [A]. In: Michaelis B, Krell G. (Eds.) Lecture Notes in Computer Science [C], Berlin German: Springer, 2003, **2781**: 1 ~ 8.
- 14 Perona P. Orientation diffusions[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, **7**(3): 457 ~ 467.
- 15 Bigun J, Granlund G H, Wiklund J. Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, **13**(8): 775 ~ 790.
- 16 Haglund L, Fleet D J. Stable estimation of image orientation[A]. In: Processings of the First IEEE International Conference on Image Processing[C], Austin, TX, USA, 1994, **3**: 68 ~ 72. (<http://citeseer.ist.psu.edu/haglund94stable.html>).
- 17 Wilson R, Clippingdale S C, Bhalerao A. Robust estimation of local orientations in images using a multiresolution approach [A]. In: Proceedings of 5th Conference SPIE Visual Communications and

- Image Processing[EB/OL], 1990. ([http://spiedl.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet? prog = normal&id = PSISDG00136000001001393000001 &idtype = cvips&gifs = yes](http://spiedl.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PSISDG00136000001001393000001&idtype=cvips&gifs=yes))
- 18 Weickert J. Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor [R]. Report No. 110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany, 1994.
- 19 Feng X G. Analysis and approaches to image local orientation estimation [D], Santa Cruz, California, USA: University of California Santa Cruz, 2003.
- 20 Weickert J. A scheme for coherence-enhancing diffusion filtering with optimized rotation invariance [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2002, **13** (1/2): 103 ~ 118.
- 21 Borman S, Stevenson R L. Super-resolution for image sequences—a review [A]. In: Proceedings of IEEE International Symposium. Circuits and Systems [C], Notre Dame, IN, USA, 1998: 374 ~ 378.
- 22 Farsiu S, Robinson M D. Fast and robust multiframe super resolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, **13**(10): 1327 ~ 1344.
- 23 Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution image reconstruction—a technical overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, **20**(3): 21 ~ 36.
- 24 Ng M K, Bose N K. Mathematical analysis of superresolution methodology [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, **20**(3): 62 ~ 74.
- 25 Capel D, Zisserman A. Super-resolution enhancement of text image sequences [A]. In: Proceedings of International Conference on Pattern Recognition [C], Barcelona, Spain, 2000: 600 ~ 605.